

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 1

Lunes 1 de noviembre de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.



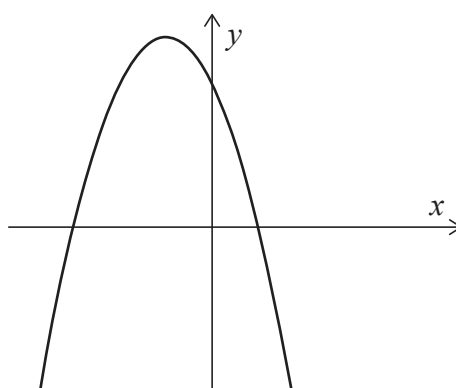
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = -2(x - 1)(x + 3)$, para $x \in \mathbb{R}$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f .



- (a) Para este gráfico de f :
 - (i) Halle la coordenada x de todas las intersecciones con el eje x .
 - (ii) Halle las coordenadas del vértice. [5]

La función f se puede escribir en la forma $f(x) = -2(x - h)^2 + k$.

- (b) Escriba el valor de h y el valor de k . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 4]

Sabiendo que $\frac{dy}{dx} = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $y = 2$ para $x = \frac{3\pi}{4}$, halle y en función de x .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



12EP03

Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 5]

La función f viene dada por $f(x) = \frac{2x+4}{3-x}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$.

(a) Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical del gráfico de f

(ii) La asíntota horizontal del gráfico de f [2]

(b) Halle las coordenadas de los puntos donde el gráfico de f corta:

(i) Al eje x

(ii) Al eje y [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

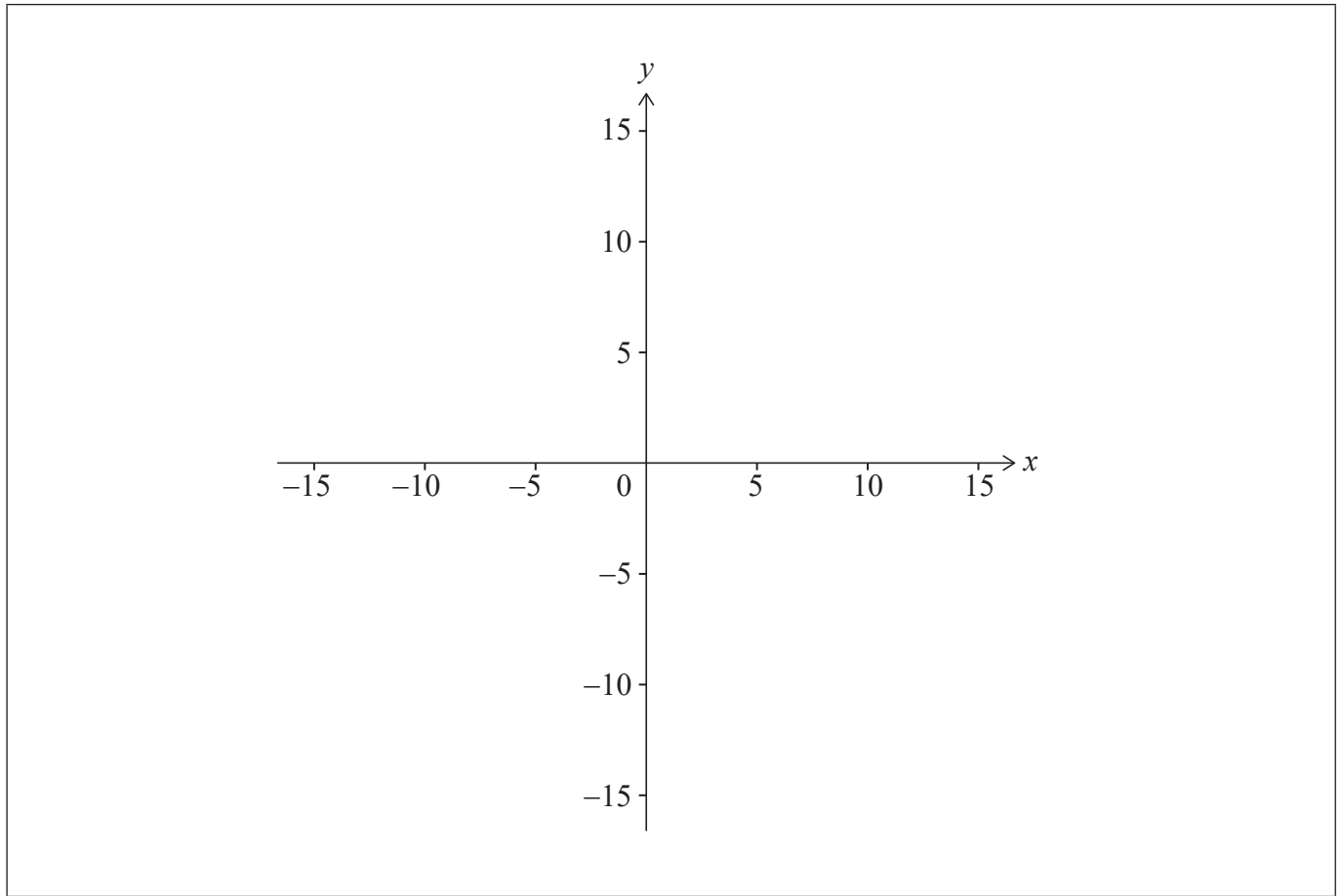
.....

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 3: continuación)

(c) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de f . [1]



12EP05

Véase al dorso

4. [Puntuación máxima: 5]

La caja 1 contiene 5 bolas rojas y 2 bolas blancas.

La caja 2 contiene 4 bolas rojas y 3 bolas blancas.

- (a) Se escoge una caja al azar y se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola sea roja. [3]

Sea A el suceso "se escoge la caja 1" y sea R el suceso "se extrae una bola roja".

- (b) Determine si los sucesos A y R son independientes. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



12EP06

5. [Puntuación máxima: 7]

La función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. La recta que tiene por ecuación $y = 6x - 1$ es la tangente al gráfico de f en $x = 4$.

(a) Escriba el valor de $f'(4)$. [1]

(b) Halle $f(4)$. [1]

La función g está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $g(x) = x^2 - 3x$ y $h(x) = f(g(x))$.

(c) Halle $h(4)$. [2]

(d) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la tangente al gráfico de h en $x = 4$. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



12EP07

Véase al dorso

6. [Puntuación máxima: 7]

(a) Muestre que $2x-3-\frac{6}{x-1}=\frac{2x^2-5x-3}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} 2\theta-3-\frac{6}{\operatorname{sen} 2\theta-1}=0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 16]

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x . La velocidad de P es igual a $v \text{ m s}^{-1}$ en el instante t segundos, donde $v(t) = 4 + 4t - 3t^2$ para $0 \leq t \leq 3$. Cuando $t = 0$, P se encuentra en el origen O .

- (a) (i) Halle el valor de t para el que P alcanza su velocidad máxima.
- (ii) Muestre que, en ese instante, la distancia de P a O es igual a $\frac{88}{27}$ metros. [7]
- (b) Dibuje aproximadamente el gráfico de v en función de t , mostrando claramente todos los puntos de intersección con los ejes que haya. [4]
- (c) Halle la distancia total que ha recorrido P . [5]

8. [Puntuación máxima: 15]

Considere la función $f(x) = a^x$, donde $x, a \in \mathbb{R}$ y $x > 0, a > 1$.

El punto $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ pertenece al gráfico de f .

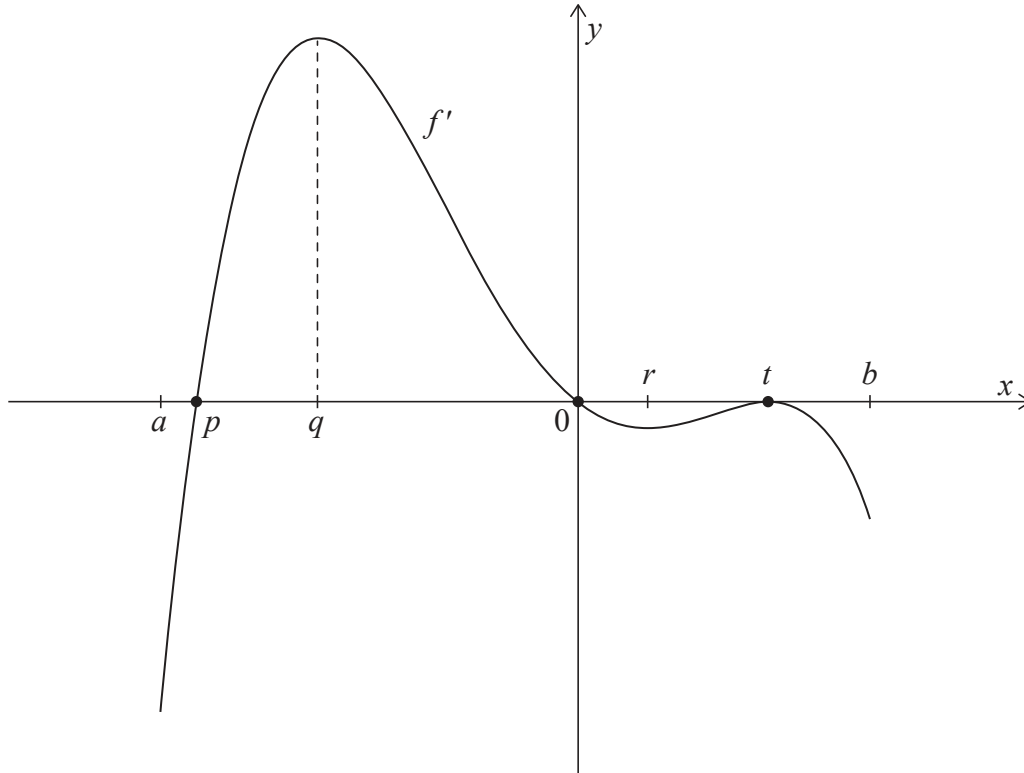
- (a) Muestre que $a = 8$. [2]
- (b) Escriba una expresión para $f^{-1}(x)$. [1]
- (c) Halle el valor de $f^{-1}(\sqrt{32})$. [3]
- (d) Considere la progresión aritmética $\log_8 27, \log_8 p, \log_8 q, \log_8 125$, donde $p > 1$ y $q > 1$.
 - (i) Muestre que $27, p, q$ y 125 son cuatro términos consecutivos de una progresión geométrica.
 - (ii) Halle el valor de p y el valor de q . [9]



No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 14]

Considere una función f cuyo dominio es $a < x < b$. La siguiente figura muestra el gráfico de f' , la derivada de f .



El gráfico de f' (la derivada de f) corta al eje x en $x=p$, $x=0$ y $x=t$. Tiene máximos locales en $x=q$ y $x=t$ y un mínimo local en $x=r$.

- (a) Halle todos los valores de x para los cuales el gráfico de f es creciente. Justifique su respuesta. [2]
- (b) Halle el valor de x para el cual el gráfico de f tiene un máximo local. [1]
- (c) (i) Halle el valor de x para el cual el gráfico de f tiene un mínimo local. Justifique su respuesta.
- (ii) Halle los valores de x para los cuales el gráfico de f tiene un punto de inflexión. Justifique su respuesta. [5]
- (d) El área total de la región delimitada por el gráfico de f' (la derivada de f) y el eje x es igual a 20. Sabiendo que $f(p) + f(t) = 4$, halle el valor de $f(0)$. [6]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021



12EP10

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



12EP11

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



12EP12